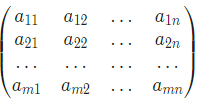
**Матриці**

**Матриці**

Матрицею розмірності *m*×*n* називається сукупність чисел *m*⋅*n*, розташованих у вигляді таблиці з *m* рядків і *n* стовпців:



Числа *aij*​називаються **елементами матриці**. Таким чином, перший індекс елемента *aij*​ вказує на номер рядка, другий – на номер стовпця, на перетині яких стоїть цей елемент.

Матриця може бути записана таким чином:

𝐴=(𝑎𝑖𝑗)=∥ 𝑎𝑖𝑗 ∥,𝑖=1,2,…,𝑚;𝑗=1,2,…,𝑛

Матриця розмірності 1×*n* називається матрицею-рядком і має вигляд:

*B*=(*a*11​ *a*12​ … *a*1*n*​)

Матриця розмірності *m*×1 називається матрицею-стовпцем і має вигляд:

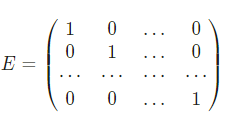
𝐶= ​

Якщо *m*=*n*, тобто число рядків матриці дорівнює числу стовпців, то матриця називається **квадратною матрицею** порядку *n*.

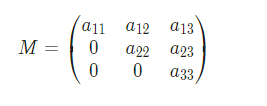
Діагональ квадратної матриці, складена з елементів *a11*​,*a22*​,…,*ann*​, називається **головною діагоналлю**.

**Побічною діагоналлю** квадратної матриці називається діагональ, що йде з правого верхнього кута цієї матриці в лівий нижній кут.

Квадратна матриця називається одиничною, якщо на головній діагоналі в неї стоять одиниці, а решта елементів – нулі. Одиничну матрицю прийнято позначати буквою *E*.

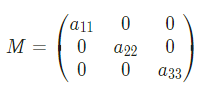


Квадратна матриця, у якої всі елементи, що стоять нижче (або вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається **трикутною**, наприклад, трикутна матриця третього порядку:



Квадратна матриця, у якої всі елементи, що стоять вище та нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається **діагональною**, *aij*​≠0, *aij*​=0 при 𝑖≠*j*:

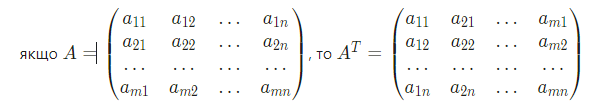
Діагональна матриця третього порядку



Матриця ∅ називається нульовою, якщо всі її елементи дорівнюють нулю.

Транспонуванням квадратної матриці називається таке перетворення, при якому її рядки стають стовпцями з тими ж номерами, а стовпці — рядками.

Матрицю, транспоновану відносно матриці *A*, позначають *AT*:



Зауважимо, що (*AT*)*T*=*A*.

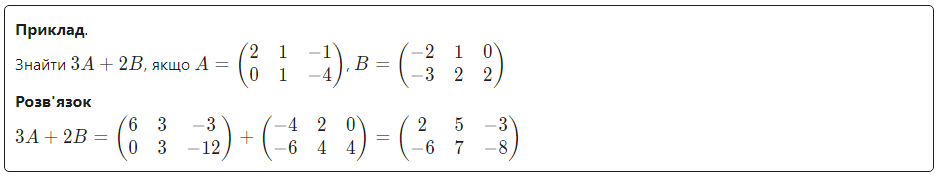
**Операції над матрицями та їх властивості**

Сумою матриць  *A*=(*aij*​) і *B*=(*bij*​) однакової розмірності *m*×*n* називається нова матриця *C*=*A*+*B* тої ж розмірності, елементи якої рівні *cij*​=*aij*​+*bij*​,*i*=1,2,…,*m*;*j*=1,2,…,*n*,

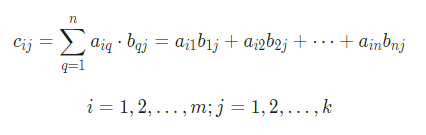
* Властивість 1. *A*+*B*=*B*+*A*
* Властивість 2. (*A*+*B*)+*C*=*A*+(*B*+*C*)
* Властивість 3. *A*+∅=*A*

Добутком матриці *A*=(*aij*​) на число *α* називається нова матриця *C*=*α*⋅*A*, елементи якої задовольняють умову *cij*​=*α*⋅*aij*​, де *i*=1,2,…,*m*;*j*=1,2,…,*n*

* Властивість 4. *A*+(−*A*)=∅
* Властивість 5. (*α*⋅*β*)*A*=*α*⋅(*βA*)
* Властивість 6. *α*⋅(*A*+*B*)=*αA*+*αB*
* Властивість 7. (*α*+*β*)*A*=*αA*+*βA*
* Властивість 8. 0⋅*A*=∅,1⋅*A*=*A*,



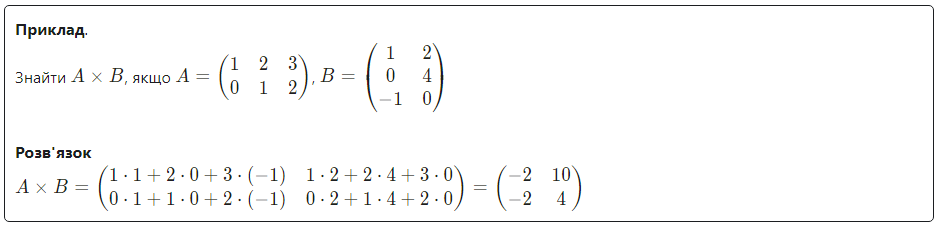
Добутком матриці *A* розмірності *m*×*n* на матрицю розмірності *n*×*k* називається матриця *C*=*A*×*B* розмірності *m*×*k*, елементи якої знаходяться за формулою:



тобто елемент *ci*​*j* дорівнює сумі добутків елементів -го рядка матриці *A* на елементи *j*-го стовпця матриці *B*.

**ВАЖЛИВО**

При множенні матриць число стовпців першої матриці (першого множника) має дорівнювати числу рядків другої матриці (другого множника).



* Властивість 9. *A*×*B*≠*B*×*A*
* Властивість 10. (*A*×*B*)×*C*=*A*×(*B*×*C*)
* Властивість 11. (*A*+*B*)×*C*=*A*×*C*+*B*×*C*
* Властивість 12. *A*×(*B*+*C*)=*A*×*B*+*A*×*C*
* Властивість 13. *A*×*E*=*E*×*A*=*A*
* Властивість 14. *A*×∅=∅×*A*=∅
* Властивість 15. (*A*×*B*)*T*=*BT*×*AT*

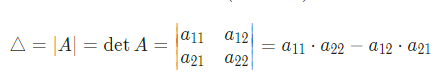
Матриці *A* і *B* називаються **переставними**, якщо *A*×*B*=*B*×*A*

# Визначники

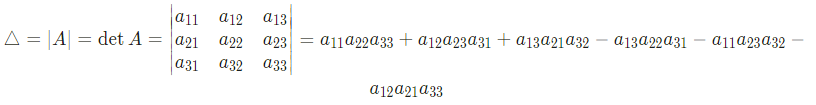
## Визначники

Для квадратних матриць існує чисельна характеристика – визначник, яка також має й численні інші додатки.

Визначником другого порядку квадратної матриці *А*= ​ називається число, що дорівнює



Визначником третього порядку квадратної матриці *А*= називається число, що дорівнює



Вираз визначника третього порядку є досить громіздким. Для запам'ятовування формули використовують «правило трикутника» або «правило Саррюса», які схематично можна зобразити наступним чином:

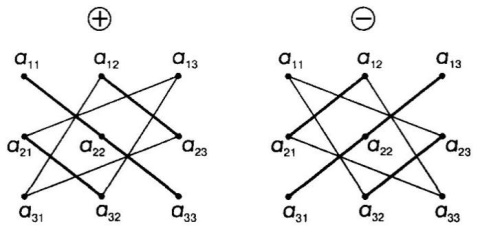


Рис. Правило трикутника

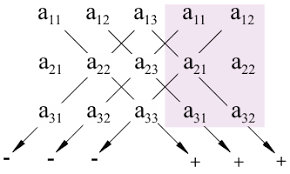
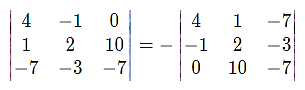


Рис. Правило Саррюса

## Властивості визначників

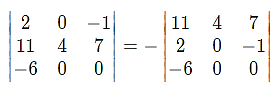
Наведемо деякі найпростіші властивості визначників.

Властивість 1. Визначник не змінюється під час транспонування матриці.



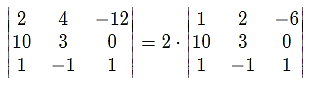
Властивість 2. Якщо матриця містить рядок, що складається з нулів, то її визначник дорівнює нулю.

Властивість 3. Якщо в матриці поміняти місцями які-небудь два рядки, то її визначник змінить знак на протилежний.



Властивість 4. Якщо в матриці є два однакові рядки, то її визначник дорівнює нулю.

Властивість 5. Під час множення рядка матриці на число, її визначник множиться на це число. Приклад.



Властивість 6. Якщо всі елементи 𝑖*i*-го рядка матриці подано у вигляді суми двох доданків  *aij*​=*bj*​+*cj*​, то її визначник дорівнює сумі визначників двох матриць, у яких усі рядки, крім 𝑖*i*-го, ідентичні заданій матриці 𝑖*i*-го рядку у першій матриці складається з елементів *bj*​, а в другій — з елементів *cj*​.

Перш ніж перейти до наступної властивості, сформулюємо важливе визначення.

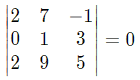
Будемо вважати, що рядок  *a*=(*a*1​,*a*2​,…,*an*​) є лінійною комбінацією рядків

*b*1​=(*b*11​,*b*12​,…,*b*1*n*​),*b*2​=(*b*21​,*b*22​,…,*b*2*n*​),…,*bm*​=(*bm*1​,*bm*2​,…,*bmn*​)

якщо існують деякі числа *α*1​,*α*2​,…,*αm*​, і не всі дорівнюють нулю, такі, що

*a*=*α*1​⋅*b*1​+*α*2​⋅*b*2​+⋯+*αm*​⋅*bm*​

Властивість 7. Якщо один із рядків матриці є лінійною комбінацією решти рядків цієї матриці, то її визначник дорівнює нулю.



Цей визначник дорівнює нулю, оскільки третій рядок є сумою першого рядка та другого рядка, помноженого на 2.

Властивість 8. Визначник матриці не зміниться, якщо до якогось її рядка додати лінійну комбінацію решти рядків цієї матриці.

Зауважимо, що з першої властивості випливає, що вся решта властивостей може бути сформульована не тільки для рядків матриці, але й для її стовпців.

## Розклад визначника по рядку або стовпцю

Нехай *A* — квадратна матриця з елементами *aij*​.

**Додатковим мінором *Mij*​ елемента *aij*​** називається визначник матриці, отриманої з матриці *A* викресленням того рядка і того стовпця, на перетині яких стоїть елемент *aij*​, тобто 𝑖*i*-го рядка і 𝑗*j*-го стовпця.

**Алгебраїчним доповненням елемента *aij*​** називається добуток:

*Aij*​=(−1)*i*+*j*⋅*Mij*​

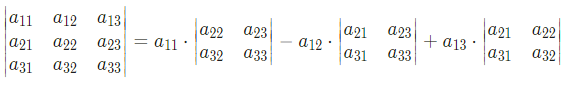
**Теорема 1 (метод зниження порядку)**. Визначник квадратної матриці може бути обчислений за формулою:

**

Ця формула називається формулою розкладу визначника за *i*-м рядком.

Аналогічно записується формула для розкладу визначника за *j*-м стовпцем.

В якості прикладу запишемо формулу розкладу визначника третього порядку за першим рядком:



Зауважимо, що при використанні формули розкладу визначника по рядку (або по стовпцю) зручно мати в цьому рядку (у цьому стовпці) багато елементів, рівних нулю (тоді відповідні їм мінори не треба буде обчислювати). Тому корисно попередньо так перетворити визначник, використовуючи властивість 8, щоб в одному з рядків (або в одному зі стовпців) тільки один елемент залишився, відмінний від нуля.

**Обернена матриця**

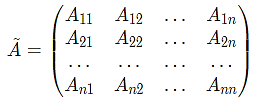
Квадратна матриця *A* *n*-го порядку називається **виродженою**, якщо визначник цієї матриці дорівнює нулю ∣*A*∣≠0, і **невиродженою**, якщо ∣𝐴∣≠0.

Матриця *A*−1 називається оберненою до матриці *A*, якщо.

*A*×*A*−1=*A*−1×*A*=*E*

Основним методом обчислення оберненої матриці *A*−1 є метод **приєднаної матриці**.

Матриця , складена з алгебраїчних доповнень *Aij*​ відповідних елементів *aij*​ матриці *A*, називається **приєднаною до матриці** *A*:



**Теорема**. Якщо матриця *A* невироджена, то існує, і до того ж єдина, обернена матриця *A*−1, рівна



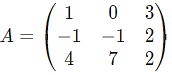
де

* △ — визначник матриці *A*;
* ()*T* — транспонована приєднана матриця.

Властивість 1. (*A*−1)*T*=(*AT*)−1

Властивість 2. (*A*×*B*)−1=*B*−1×*A*−1

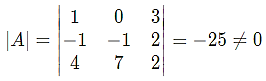
Властивість 3. (*α*×*B*)−1=*α*1​×*B*−1

**Приклад**.

Знайти *A*−1, для матриці

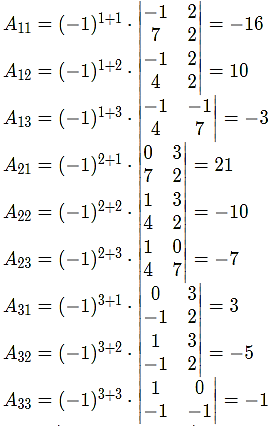
**Розв'язок**

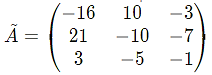
Обчислимо визначник матриці:



Значить задана матриця 𝐴*A* невироджена і для неї можна знайти обернену матрицю *A*−1.

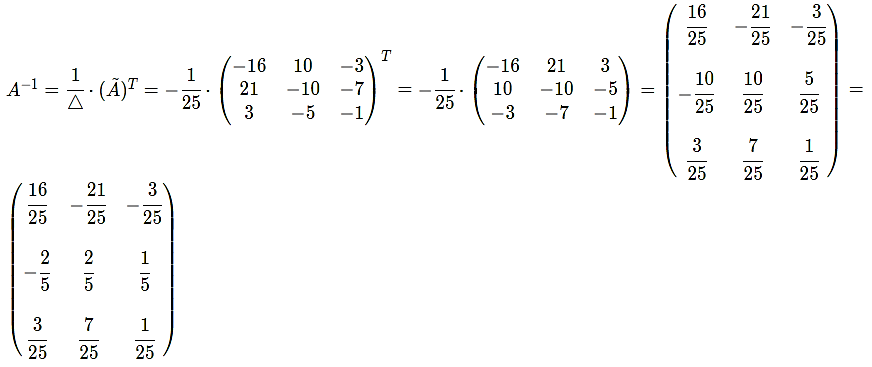
Знайдемо алгебраїчні доповнення для приєднаної матриці :

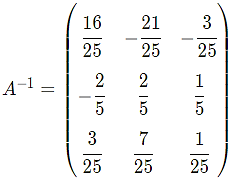




 — приєднана матриця

Обернена матриця матиме вигляд:

  
Таким чином



**Вектори**

Узагальнимо відому зі шкільного курсу геометрії інформацію про вектори. Відомо, що якщо на площині задана прямокутна декартова система координат, то кожна точка *P* площини однозначно характеризується двома числами (*x*,*y*) — *координатами точки* *P*.

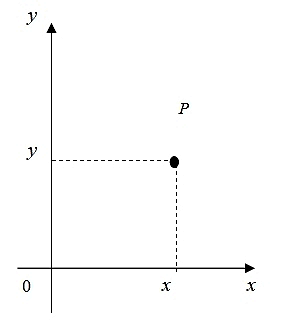


Рис. 1

Аналогічно, кожній точці *P* тривимірного простору (рис. 2) у заданій системі координат відповідає упорядкована трійка чисел (*x*,*y*,*z*), яка називається *координатами точки* *P*.

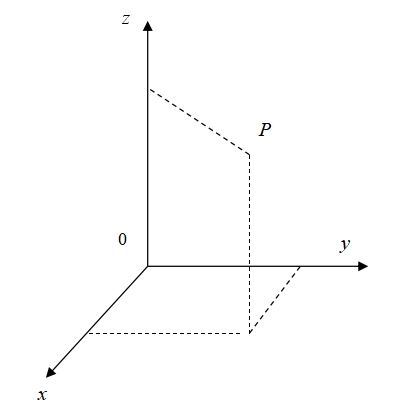


Рис. 2

При розв'язанні різних задач доводиться розглядати *спрямований відрізок*, тобто безліч точок, що лежать між точками *A* і *B* прямою зі вказаним напрямком

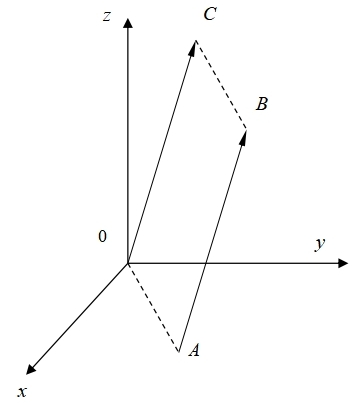


Рис. 3

Напрямок такого відрізка прийнято визначати порядком задання точок *A* і *B*: позначають через  спрямований відрізок з початком *A* і кінцем *B*, спрямований від початку *A* і кінцю *B*. При цьому зручно не розрізняти між собою два будь-які спрямовані відрізки, якщо вони лежать на паралельних прямих, спрямованих в один бік, і мають однакові довжини, оскільки і з фізичної, і з геометричної точки зору вони позначають одне й те саме.

*Вектором* називають спрямований відрізок  . Позначають вектор так само, як і спрямований відрізок  або однією малою літерою . *Нульовим вектором* називають вектор, у якого початок і кінець збігаються, позначення  або просто 0.

Відстань між початком і кінцем вектора називається його*довжиною* (а також *модулем* вектора) і позначається ∣∣ або ∣∣. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним вектором*.

Вектори називають *колінеарними*, якщо вони розташовані на одній прямій або на паралельних прямих.

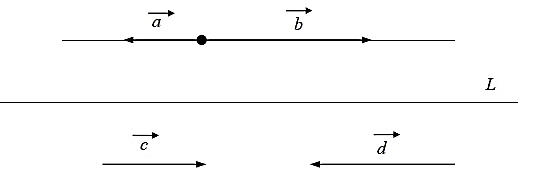


Рис. 4

Вектори називають *компланарними*, якщо існує площина, якій вони паралельні.

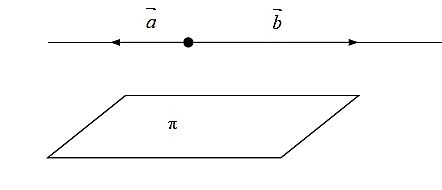


Рис. 5

Два вектори  і  будемо називати *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані та мають рівні модулі. Якщо спрямований відрізок  перенести паралельно самому собі, то, очевидно, вийде спрямований відрізок, рівний вихідному (рис. 3). Усякий спрямований відрізок  можна перенести паралельно самому собі так, щоб його початок збігався з початком координат. Зрозуміло, що вектору  відповідає один і лише один спрямований відрізок  з початком у початку координат.

*Координатами вектора*  називаються три числа (*x*,*y*,*z*) — координати точки *C*. Вектор з координатами (*x*,*y*,*z*) прийнято позначати =(*x*,*y*,*z*). При цьому числа (*x*,*y*,*z*) називають *проєкціями вектора* на відповідній осі координат

Очевидно, що якщо ==(*x*,*y*,*z*), то його модуль знаходиться за формулою



*Напрямок вектора* визначається кутами, які він складає з позитивними напрямками відповідних осей: з віссю *Ox* — ∠𝛼, з 𝑂𝑦 — ∠𝛽, з *Oz* — ∠𝛾. Косинуси цих кутів називають напрямними косинусами вектора.

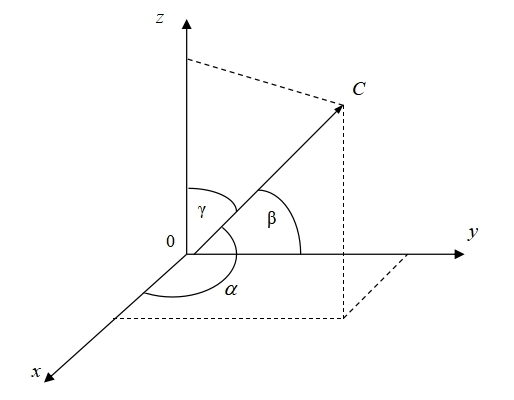


Рис. 6

**Приклад 1**

Заданий двовимірний вектор =(𝑥,𝑦). Знайти кути, утворені цим вектором з позитивним напрямком відповідних осей координат і встановити залежність між напрямними косинусами цього вектора.

**Розв'язок**

Знаходимо модуль вектора =



Із △*CNO* і △*CMO* (рис. 7) відповідно знаходимо

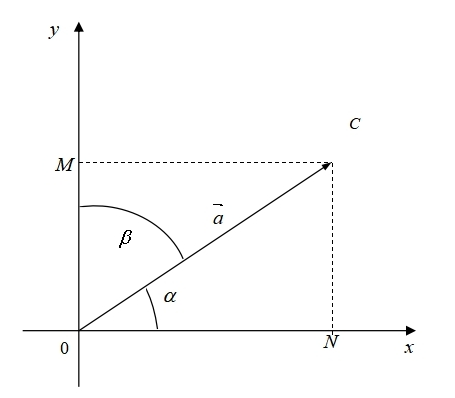
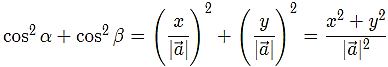


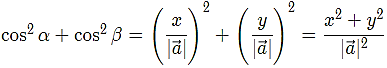
Рис. 7



Тоді



і таким чином залежність між напрямними косинусами двовимірного вектора запишеться



У випадку тривимірного вектора ця залежність має вигляд

cos2𝛼+cos2𝛽+cos2𝛾=1

Якщо точка *A* має координати (𝑥1,𝑦1,𝑧1), а точка *B* координати (𝑥2,𝑦2,𝑧2), то вектор  має координати (𝑥2−𝑥1,𝑦2−𝑦1,𝑧2−𝑧1) (див. рис.8).

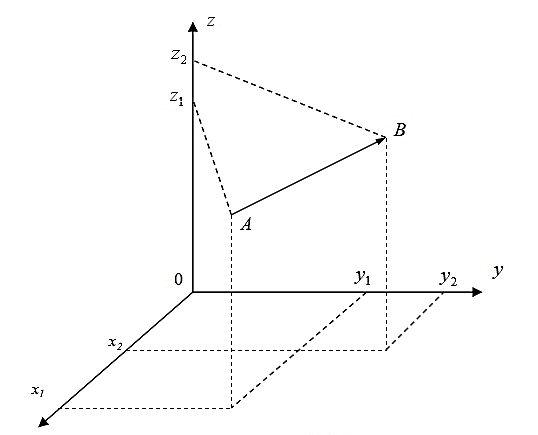


Рис. 8

*Сумою векторів*  і  називається третій вектор , отриманий за *правилом трикутника*: вектори, що додаються, переносяться паралельно самим собі так, щоб початок другого вектор збігся з кінцем першого; тоді спрямований відрізок, що з'єднує початок першого вектора з кінцем другого і є =+.

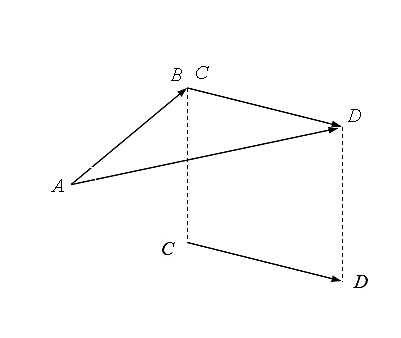


Рис. 9

З визначення дії додавання випливає, що:

1. +=+ (властивість переміщення);
2. (+)+=+(+) (властивість сполучності).

Для кожного вектора = існує *протилежний вектор* −=′, що має ту саму довжину, але протилежний напрямок. Очевидно, що +(−)=0, де 0 — нуль-вектор.

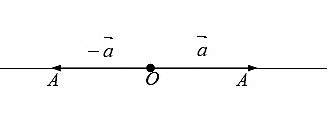


Рис. 10

З визначення суми векторів випливає *правило паралелограма* для додавання двох векторів – сума двох векторів = і =, приведених до спільного початку 0, являє собою діагональ паралелограма *OACB*, побудованого на векторах, що додаються.

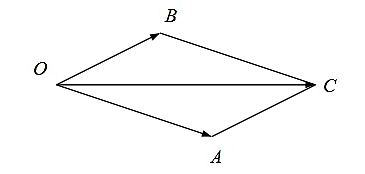


Рис. 11

Аналогічно визначається сума кількох векторів 1, 2, 3,...,𝑛​​. Будуються вектори 1′=1,′=2,...,𝑛′=𝑛​​ так, щоб початок вектора 2′ збігся з кінцем вектора 1′ і так далі, початок вектора 𝑛′ збігався з кінцем вектора 𝑛−1​. Тоді вектор , початок якого збігається з початком вектора 1​​′, а кінець з кінцем вектора 𝑛′ будемо називати сумою векторів 1′,2′,3′,...,𝑛′.

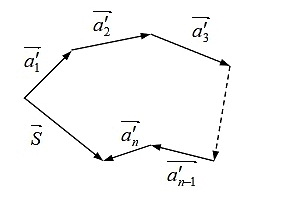


Рис. 12

Віднімання векторів визначається як операція, обернена до додавання. Різницею векторів  і  називається вектор −, який у сумі з вектором дає вектор . У паралелограмі, побудованому на даних векторах  і , їх різницею є відповідно спрямована друга діагональ паралелограма.

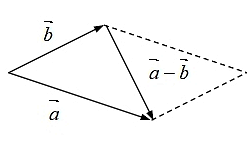


Рис. 13

Для будь-яких векторів і  справедлива *нерівність трикутника*

∣+∣≤∣∣+∣∣

Вона випливає з того, що сума двох сторін трикутника більша за третю сторону (рис. 14).

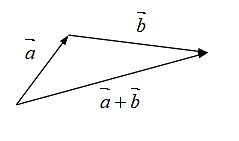


Рис. 14

Добутком вектора  на число 𝑘 називається вектор , модуль якого рівний добутку модуля вектора  на модуль числа 𝑘, а напрямок збігається з напрямком вектора , якщо 𝑘>0, і протилежно напрямку вектора , якщо 𝑘<0. При 𝑘=0 или =0 считают =0.

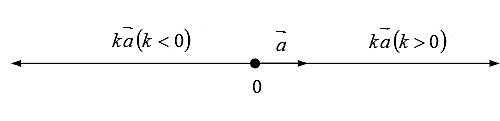


Рис. 15

Якщо вектори  і  колінеарні і не дорівнюють нулю, то =𝑘 =.

Ця операція має властивості:

1. 𝜆(𝜇)=(𝜆𝜇) (сполучність);
2. (𝜆+𝜇)=𝜆+𝜇 (розподільність відносно чисел);
3. 𝜆(+)=𝜆+𝜆(розподільність відносно векторів).

*Проєкцією точки* *A* на вісь 𝑙 називається основа 𝐴′ перпендикуляра 𝐴𝐴′, опущеного з точки 𝐴 на цю вісь.

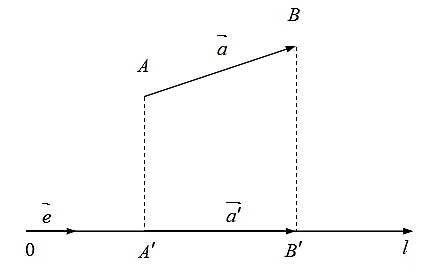


Рис. 16

Під *компонентою* (*складовою*) вектора = відносно осі 𝑙 (рис. 16) розуміється вектор ′=𝐴′𝐵′→*a*′=*A*′*B*′, початок якого є 𝐴′*A*′ проєкцією на вісь 𝑙*l* початку вектора 𝑎⃗*a*, а кінець якого 𝐵′*B*′ є проєкцією на вісь 𝑙*l* кінця 𝐵*B* цього вектора.

Під проєкцією вектора 𝑎⃗*a* на вісь 𝑙*l* розуміється скаляр 𝑎1=±∣𝐴′𝐵′→∣*a*1​=±∣*A*′*B*′∣, рівний модулю його компоненти 𝑎′⃗*a*′ відносно осі 𝑙*l*, взятої зі знаком плюс, якщо напрямок компоненти збігається з напрямком осі 𝑙*l*, і зі знаком мінус, якщо напрямок компоненти протилежний напрямку осі 𝑙*l*. Помітимо, що якщо 𝑒⃗*e* — одиничний вектор осі 𝑙*l*, то для компоненти 𝑎′⃗*a*′ справедлива рівність

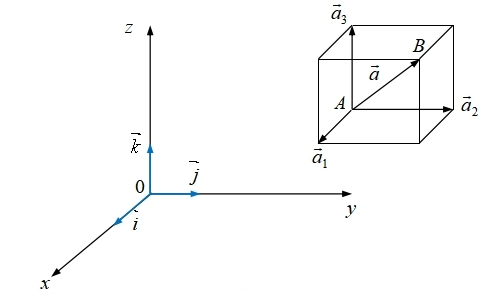
𝑎′⃗=𝑎1𝑒⃗*a*′=*a*1​*e*

Нехай вектор 𝑎⃗=(𝑎𝑥,𝑎𝑦,𝑎𝑧)*a*=(*ax*​,*ay*​,*az*​) заданий своїми проєкціями на осі координат 𝑂𝑥,𝑂𝑦,𝑂𝑧*Ox*​,*Oy*​,*Oz*​.

Побудуємо паралелепіпед (рис. 17), діагоналлю якого є вектор 𝑎⃗*a*, а ребрами служать його компоненти 𝑎1⃗*a*1​​, 𝑎2⃗*a*2​​, 𝑎3⃗*a*3​​ відносно координатних осей. Маємо розклад

𝑎⃗=𝑎1⃗+𝑎2⃗+𝑎3⃗*a*=*a*1​​+*a*2​​+*a*3​​

**(1)**

Рис. 17

Якщо ввести одиничні вектори 𝑖⃗*i*, 𝑗⃗*j*​, 𝑘⃗*k* спрямовані по осях координат, то на основі 𝑎′⃗=𝑎1𝑒⃗*a*′=*a*1​*e* будемо мати

𝑎1⃗=𝑎𝑥𝑖⃗*a*1​​=*ax*​*i*, 𝑎2⃗=𝑎𝑦𝑗⃗*a*2​​=*ay*​*j*​, 𝑎3⃗=𝑎𝑧𝑘⃗*a*3​​=*az*​*k*.

Підставляючи ці вирази в рівність (1), отримуємо координатну форму вектора

𝑎⃗=𝑎𝑥𝑖⃗+𝑎𝑦𝑗⃗+𝑎𝑧𝑘⃗*a*=*ax*​*i*+*ay*​*j*​+*az*​*k*

Якщо 𝑏⃗=(𝑏𝑥,𝑏𝑦,𝑏𝑧)*b*=(*bx*​,*by*​,*bz*​), то аналогічно

𝑏⃗=𝑏𝑥𝑖⃗+𝑏𝑦𝑗⃗+𝑏𝑧𝑘⃗*b*=*bx*​*i*+*by*​*j*​+*bz*​*k*

Тепер розглянуті вище лінійні операції над векторами можна записати в координатній формі:

𝜆𝑎⃗=𝜆𝑎𝑥𝑖⃗+𝜆𝑎𝑦𝑗⃗+𝜆𝑎𝑧𝑘⃗*λa*=*λax*​*i*+*λay*​*j*​+*λaz*​*k*

або

𝜆𝑎⃗=(𝜆𝑎𝑥,𝜆𝑎𝑦,𝜆𝑎𝑧)*λa*=(*λax*​,*λay*​,*λaz*​)

тобто при множенні вектора на скаляр координати вектора множаться на цей скаляр;

𝑎⃗±𝑏⃗=(𝑎𝑥±𝑏𝑥)𝑖⃗+(𝑎𝑦±𝑏𝑦)𝑗⃗+(𝑎𝑧±𝑏𝑧)𝑘⃗*a*±*b*=(*ax*​±*bx*​)*i*+(*ay*​±*by*​)*j*​+(*az*​±*bz*​)*k*

або

𝑎⃗±𝑏⃗=(𝑎𝑥±𝑏𝑥,𝑎𝑦±𝑏𝑦,𝑎𝑧±𝑏𝑧)*a*±*b*=(*ax*​±*bx*​,*ay*​±*by*​,*az*​±*bz*​)

тобто при додаванні (або відніманні) векторів їх однойменні координати додаються (або віднімаються).

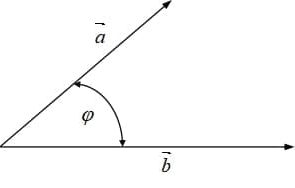
**Скалярний добуток векторів**

Під скалярним добутком двох векторів 𝑎⃗*a* і 𝑏⃗*b* розуміється число, рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто.

(𝑎⃗,𝑏⃗)=∣𝑎⃗∣∣𝑏⃗∣𝑐𝑜𝑠𝜙(*a*,*b*)=∣*a*∣∣*b*∣*cosϕ*

**(1)**

Скалярний добуток векторів 𝑎⃗*a* і 𝑏⃗*b* позначається також символами 𝑎⃗𝑏⃗*ab* і 𝑎⃗⋅𝑏⃗*a*⋅*b*. Кутом між векторами і називається кут 𝜙*ϕ*, на який слід повернути один із векторів, щоб їхні напрями збігалися (рис. 1). У подальшому під кутом між векторами будемо розуміти кут 𝜙*ϕ*, що задовольняє умову 0≤𝜙≤𝜋0≤*ϕ*≤*π*.

Рис. 1

Скалярний добуток має такі властивості:

1. (𝑎⃗,𝑏⃗)=(𝑏⃗,𝑎⃗)(*a*,*b*)=(*b*,*a*)
2. 𝑎⃗2=(𝑎⃗,𝑎⃗)=∣𝑎⃗∣2*a*2=(*a*,*a*)=∣*a*∣2
3. (𝜆𝑎⃗,𝑏⃗)=𝜆(𝑎⃗,𝑏⃗)(*λa*,*b*)=*λ*(*a*,*b*)
4. (𝑎⃗+𝑏⃗,𝑐⃗)=(𝑎⃗,𝑐⃗)+(𝑏⃗,𝑐⃗)(*a*+*b*,*c*)=(*a*,*c*)+(*b*,*c*)

Якщо вектори 𝑎⃗*a* і 𝑏⃗*b* задані своїми координатами

𝑎⃗=𝑥1𝑖⃗+𝑦1𝑗⃗+𝑧1𝑘⃗,𝑏⃗=𝑥2𝑖⃗+𝑦2𝑗⃗+𝑧2𝑘⃗*a*=*x*1​*i*+*y*1​*j*​+*z*1​*k*,*b*=*x*2​*i*+*y*2​*j*​+*z*2​*k*

то перемножуючи ці вектори як багаточлени, що можливо з властивості 4) і враховуючи співвідношення

𝑖⃗𝑗⃗=𝑗⃗𝑘⃗=𝑘⃗𝑖⃗=0*ij*​=*j*​*k*=*ki*=0 и 𝑖⃗𝑖⃗=𝑗⃗𝑗⃗=𝑘⃗𝑘⃗=1*ii*=*j*​*j*​=*kk*=1,

будемо мати

𝑎⃗𝑏⃗=(𝑥1𝑖⃗+𝑦1𝑗⃗+𝑧1𝑘⃗)(𝑥2𝑖⃗+𝑦2𝑗⃗+𝑧2𝑘⃗)=𝑥1𝑥2+𝑦1𝑦2+𝑧1𝑧2*ab*=(*x*1​*i*+*y*1​*j*​+*z*1​*k*)(*x*2​*i*+*y*2​*j*​+*z*2​*k*)=*x*1​*x*2​+*y*1​*y*2​+*z*1​*z*2​

Остаточно

𝑎⃗𝑏⃗=𝑥1𝑥2+𝑦1𝑦2+𝑧1𝑧2*ab*=*x*1​*x*2​+*y*1​*y*2​+*z*1​*z*2​

**(2)**

тобто скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів.

Зокрема, відстань 𝑑*d* між двома точками 𝐴(𝑥1,𝑦1,𝑧1)*A*(*x*1​,*y*1​,*z*1​) і 𝐵(𝑥2,𝑦2,𝑧2)*B*(*x*2​,*y*2​,*z*2​) можна розглядати як довжину вектора 𝐴𝐵→=(𝑥2−𝑥1,𝑦2−𝑦1,𝑧2−𝑧1)*AB*=(*x*2​−*x*1​,*y*2​−*y*1​,*z*2​−*z*1​). Тому

𝑑=(𝑥2−𝑥1)2+(𝑦2−𝑦1)2+(𝑧2−𝑧1)2*d*=(*x*2​−*x*1​)2+(*y*2​−*y*1​)2+(*z*2​−*z*1​)2​

З формули **(1)** кут між векторами 𝑎⃗*a* і 𝑏⃗*b* знаходиться за формулою

𝑐𝑜𝑠𝜙=𝑎⃗𝑏⃗∣𝑎⃗∣∣𝑏⃗∣=𝑥1𝑥2+𝑦1𝑦2+𝑧1𝑧2𝑥12+𝑦12+𝑧12𝑥22+𝑦22+𝑧22*cosϕ*=∣*a*∣∣*b*∣*ab*​=*x*12​+*y*12​+*z*12​​*x*22​+*y*22​+*z*22​​*x*1​*x*2​+*y*1​*y*2​+*z*1​*z*2​​

**Приклад 1**.

Вектори 𝑎⃗*a* і 𝑏⃗*b* колінеарні і 𝑎⃗=(𝑥1,𝑦1,𝑧1)*a*=(*x*1​,*y*1​,*z*1​), 𝑏⃗=(𝑥2,𝑦2,𝑧2)*b*=(*x*2​,*y*2​,*z*2​). Встановити умову колінеарності цих векторів.

**Розв'язок**

Якщо 𝑎⃗∣∣𝑏⃗*a*∣∣*b*, то 𝑎⃗=𝜆𝑏⃗*a*=*λb*, де 𝜆*λ* — деяке число або в координатній формі (𝑥1,𝑦1,𝑧1)=(𝜆𝑥2,𝜆𝑦2,𝜆𝑧2)(*x*1​,*y*1​,*z*1​)=(*λx*2​,*λy*2​,*λz*2​). З рівності векторів випливає

𝑥1=𝜆𝑥2,𝑦1=𝜆𝑦2,𝑧1=𝜆𝑧2*x*1​=*λx*2​,*y*1​=*λy*2​,*z*1​=*λz*2​

або

𝑥1𝑥2=𝑦1𝑦2=𝑧1𝑧2*x*2​*x*1​​=*y*2​*y*1​​=*z*2​*z*1​​

Таким чином, якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні (справедливе і зворотне твердження).

**Приклад 2**.

Вектори 𝑎⃗=(𝑥1,𝑦1,𝑧1)*a*=(*x*1​,*y*1​,*z*1​), 𝑏⃗=(𝑥2,𝑦2,𝑧2)*b*=(*x*2​,*y*2​,*z*2​), перпендикулярні. Встановити умову перпендикулярності цих векторів.

**Розв'язок**

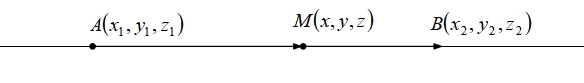
Якщо 𝑎⃗⊥𝑏⃗*a*⊥*b*, то 𝜙=𝜋2*ϕ*=2*π*​ і, отже, 𝑐𝑜𝑠𝜙=0*cosϕ*=0. Тоді згідно з формулами (1) і (2) маємо

(𝑎⃗,𝑏⃗)=0(*a*,*b*)=0 или 𝑥1𝑥2+𝑦1𝑦2+𝑧1𝑧2=0*x*1​*x*2​+*y*1​*y*2​+*z*1​*z*2​=0

Таким чином, якщо два вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

**Приклад 3**

Відомо, що відрізок 𝐴𝐵*AB* точкою 𝑀*M* ділиться у відношенні 𝜆*λ*, тобто 𝐴𝑀𝑀𝐵=𝜆,𝜆>0*MBAM*​=*λ*,*λ*>0. Знайти координати точки 𝑀(𝑥,𝑦,𝑧)*M*(*x*,*y*,*z*), якщо 𝐴(𝑥1,𝑦1,𝑧1),𝐵(𝑥2,𝑦2,𝑧2)*A*(*x*1​,*y*1​,*z*1​),*B*(*x*2​,*y*2​,*z*2​) (рис. 2).

Рис. 2

**Розв'язок**

Запишемо відношення 𝐴𝑀𝑀𝐵=𝜆*MBAM*​=*λ* у векторній формі, вводячи вектори 𝐴𝑀→*AM* і 𝑀𝐵→*MB*, 𝐴𝑀→=(𝑥−𝑥1,𝑦−𝑦1,𝑧−𝑧1)*AM*=(*x*−*x*1​,*y*−*y*1​,*z*−*z*1​), 𝑀𝐵→=(𝑥2−𝑥,𝑦2−𝑦,𝑧2−𝑧)*MB*=(*x*2​−*x*,*y*2​−*y*,*z*2​−*z*) або в координатній формі

(𝑥−𝑥1,𝑦−𝑦1,𝑧−𝑧1)=(𝜆(𝑥2−𝑥),𝜆(𝑦2−𝑦),𝜆(𝑧2−𝑧))(*x*−*x*1​,*y*−*y*1​,*z*−*z*1​)=(*λ*(*x*2​−*x*),*λ*(*y*2​−*y*),*λ*(*z*2​−*z*))

З рівності векторів випливає рівність відповідних координат

𝑥−𝑥1=𝜆(𝑥2−𝑥),𝑦−𝑦1=𝜆(𝑦2−𝑦),𝑧−𝑧1=𝜆(𝑧2−𝑧)*x*−*x*1​=*λ*(*x*2​−*x*),*y*−*y*1​=*λ*(*y*2​−*y*),*z*−*z*1​=*λ*(*z*2​−*z*)

Звідки

𝑥=𝑥1+𝜆𝑥21+𝜆,𝑦=𝑦1+𝜆𝑦21+𝜆,𝑧=𝑧1+𝜆𝑧21+𝜆*x*=1+*λx*1​+*λx*2​​,*y*=1+*λy*1​+*λy*2​​,*z*=1+*λz*1​+*λz*2​​

**(3)**

Формули (3) називаються формулами ділення відрізка в заданому відношенні.

Якщо точка 𝑀*M* — середина відрізка 𝐴𝐵*AB*, то 𝜆=1*λ*=1 і формули ділення відрізка навпіл запишуться

𝑥=𝑥1+𝑥22,𝑦=𝑦1+𝑦22,𝑧=𝑧1+𝑧22*x*=2*x*1​+*x*2​​,*y*=2*y*1​+*y*2​​,*z*=2*z*1​+*z*2​​

Якщо одночасно із заданням трьох векторів сказано, який з них вважається першим, яким другим і яким третім, то кажуть, що задана **упорядкована трійка векторів**; втім, надалі, опускаючи прикметник, ми будемо говорити просто: **трійка векторів**.

У тексті трійка векторів буде записуватись у порядку нумерації; наприклад, якщо ми пишемо: 𝑎⃗𝑏⃗𝑐⃗*abc*, то значить, 𝑎⃗*a* вважається першим вектором, 𝑏⃗*b* – другий, 𝑐⃗*c* – третім, якщо ми пишемо: 𝑏⃗𝑐⃗𝑎⃗*bca*, то значить 𝑏⃗*b*, вважається першим вектором, другим – 𝑐⃗*c*, 𝑎⃗*a* – третім.

Трійка некомпланарних векторів називається **правою (лівою)**, якщо

1. З кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого видно проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою).
2. Знаходячись всередині тілесного кута, найкоротший поворот від першого вектора до другого, від другого до третього та від третього до першого видно проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою).
3. Вектори, що складають її, розташовуються в порядку нумерації аналогічно до того, як розташовані великий, вказівний і середній пальці правої (лівої) руки.

Детальніше: трійка некомпланарних векторів називається правою, якщо її третій вектор розташований відносно площини перших двох з тієї ж сторони, з якою розташується середній палець правої руки, великий палець якої направлений по першому вектору трійки, а вказівний – по другому.

Трійки компланарних векторів не належать ні до правих, ні до лівих.

Нехай дані які-небудь некомпланарні вектори 𝑎⃗,𝑏⃗,𝑐⃗*a*,*b*,*c*. Нумеруючи їх усіма різноманітними способами, ми отримаємо шість трійок

1. 𝑎⃗,𝑏⃗,𝑐⃗*a*,*b*,*c*;
2. 𝑏⃗,𝑐⃗,𝑎⃗*b*,*c*,*a*;
3. 𝑐⃗,𝑎⃗,𝑏⃗*c*,*a*,*b*;
4. 𝑏⃗,𝑎⃗,𝑐⃗*b*,*a*,*c*;
5. 𝑎⃗,𝑐⃗,𝑏⃗*a*,*c*,*b*;
6. 𝑐⃗,𝑏⃗,𝑎⃗*c*,*b*,*a*.

Серед вказаних шести трійок є три праві та три ліві.

**Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)**

Розглянемо системи рівнянь першого ступеня з кількома невідомими або, як зазвичай кажуть, *системи лінійних рівнянь*.

Ці системи складаються з довільної кількості рівнянь і невідомих, причому іноді кількість рівнянь системи не буде навіть дорівнювати числу невідомих.

Розглянемо систему з 𝑚*m* лінійних рівнянь з 𝑛*n* невідомими (𝑚*m* може бути рівне 𝑛*n*):

{𝑎11𝑥1+𝑎12𝑥2+…+𝑎1𝑛𝑥𝑛=𝑏1𝑎21𝑥1+𝑎22𝑥2+…+𝑎2𝑛𝑥𝑛=𝑏2…𝑎𝑚1𝑥1+𝑎𝑚2𝑥2+…+𝑎𝑚𝑛𝑥𝑛=𝑏𝑚⎩⎪⎪⎪⎪⎨⎪⎪⎪⎪⎧​*a*11​*x*1​+*a*12​*x*2​+…+*a*1*n*​*xn*​=*b*1​*a*21​*x*1​+*a*22​*x*2​+…+*a*2*n*​*xn*​=*b*2​…*am*1​*x*1​+*am*2​*x*2​+…+*amn*​*xn*​=*bm*​​

де 𝑥1,𝑥2,…,𝑥𝑛*x*1​,*x*2​,…,*xn*​ — невідомі змінні, 𝑎𝑖𝑗,𝑖=1,2,…,𝑚;𝑗=1,2,…,𝑛*aij*​,*i*=1,2,…,*m*;*j*=1,2,…,*n* — числа (дійсні або комплексні), 𝑏1,𝑏2,…,𝑏𝑛*b*1​,*b*2​,…,*bn*​ — вільні члени.

Якщо 𝑏1=𝑏2=…=𝑏𝑛=0*b*1​=*b*2​=…=*bn*​=0, то система лінійних алгебраїчних рівнянь називається **однорідною**, в іншому випадку – **неоднорідною**

**Розв'язок системи лінійних рівнянь**[**#**](https://textbook.edu.goit.global/python/math-6vg4dc/v1/uk/docs/linear-algebra/linear-equation-systems#%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%B2%D1%8F%D0%B7%D0%BE%D0%BA-%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B8-%D0%BB%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BD%D0%B8%D1%85-%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D1%8C)

Розв'язком системи лінійних рівнянь називається така сукупність значення невідомих змінних 𝑥1=𝑘1,𝑥2=𝑘2,…,𝑥𝑛=𝑘𝑛*x*1​=*k*1​,*x*2​=*k*2​,…,*xn*​=*kn*​, за яких усі рівняння системи перетворюються на тотожності.

Якщо існує хоча б один розв'язок системи лінійних рівнянь алгебри, то вона називається **сумісною**, в іншому випадку – **несумісною**.

Наприклад, система $\begin{cases} 5x*{1} + x*{2} = 1 \ 5x\_1 + x\_2 = -7 \end{cases} $ є несумісною. Ліві частини рівнянь системи збігаються, але праві різні, і тому жодна система значень невідомих не може задовольнити обидва рівняння одразу.

Якщо СЛАР має єдиний розв'язок, то вона називається **визначеною**. Якщо розв'язків більше одного, то система називається **невизначеною**.

Однорідна система лінійних рівнянь завжди сумісна, оскільки має нульовий розв'язок (0;0;...;0)(0;0;...;0). Якщо в системі лінійних однорідних рівнянь число рівнянь менше від числа невідомих, то ця система має, окрім нульового розв'язку, також і ненульові розв'язки, тобто розв'язки, у яких значення деяких (або навіть усіх) невідомих відмінні від нуля; таких розв'язків буде нескінченно багато.

Завдання теорії систем лінійних рівнянь полягає в розробці методів, які дозволяють дізнатися, чи сумісна дана система рівнянь або ні, у разі сумісності встановити число розв'язків, а також вказати спосіб знайти всі ці розв'язки.

**Матричний метод**[**#**](https://textbook.edu.goit.global/python/math-6vg4dc/v1/uk/docs/linear-algebra/linear-equation-systems#%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%B9-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4)

Нехай дана система 𝑛*n* лінійних рівнянь з 𝑛*n* невідомими:

{𝑎11𝑥1+𝑎12𝑥2+…+𝑎1𝑛𝑥𝑛=𝑏1𝑎21𝑥1+𝑎22𝑥2+…+𝑎2𝑛𝑥𝑛=𝑏2…𝑎𝑛1𝑥1+𝑎𝑛2𝑥2+…+𝑎𝑛𝑛𝑥𝑛=𝑏𝑛⎩⎪⎪⎪⎪⎨⎪⎪⎪⎪⎧​*a*11​*x*1​+*a*12​*x*2​+…+*a*1*n*​*xn*​=*b*1​*a*21​*x*1​+*a*22​*x*2​+…+*a*2*n*​*xn*​=*b*2​…*an*1​*x*1​+*an*2​*x*2​+…+*ann*​*xn*​=*bn*​​

причому визначник цієї системи відмінний від нуля. Позначимо через 𝐴*A* матрицю з коефіцієнтів даної системи; ця матриця невироджена, оскільки, за припущенням, det⁡𝐴=∣𝐴∣≠0det*A*=∣*A*∣=0.

Позначимо далі через 𝑋*X* стовпець із невідомих, через 𝐵*B* — стовпець із вільних членів системи, тобто.

𝑋=(𝑥1𝑥2…𝑥𝑛),𝐵=(𝑏1𝑏2…𝑏𝑛)*X*=⎝⎜⎜⎜⎛​*x*1​*x*2​…*xn*​​⎠⎟⎟⎟⎞​,*B*=⎝⎜⎜⎜⎛​*b*1​*b*2​…*bn*​​⎠⎟⎟⎟⎞​

Добуток має 𝐴𝑋*AX* зміст, оскільки число стовпців матриці 𝐴*A* рівне числу рядків матриць 𝑋*X*, причому цей добуток буде стовпцем, складеним із лівих частин рівнянь заданої системи. Таким чином, систему можна записати у вигляді одного матричного рівняння:

𝐴𝑋=𝐵*AX*=*B*

Помножуючи обидві частини цього рівняння зліва на матрицю 𝐴−1*A*−1, існування якої випливає з невиродженості квадратної 𝐴*A* матриці , ми отримаємо:

𝐴−1⋅𝐴𝑋=𝐴−1⋅𝐵,𝐸⋅𝑋=𝐴−1𝐵,𝑋=𝐴−1𝐵*A*−1⋅*AX*=*A*−1⋅*B*,*E*⋅*X*=*A*−1*B*,*X*=*A*−1*B*

**Приклад 1**.

Розв'язати систему рівнянь матричним методом: {2𝑥+3𝑦+2𝑧=9𝑥+2𝑥−3𝑧=143𝑥+4𝑦+𝑧=16⎩⎪⎪⎨⎪⎪⎧​2*x*+3*y*+2*z*=9*x*+2*x*−3*z*=143*x*+4*y*+*z*=16​

**Розв'язок**

Запишемо задану систему у вигляді матричного рівняння: 𝐴⋅𝑋=𝐵*A*⋅*X*=*B*, де

𝐴=(23212−3341);𝐵=(91416);𝑋=(𝑥𝑦𝑧)*A*=⎝⎛​213​324​2−31​⎠⎞​;*B*=⎝⎛​91416​⎠⎞​;*X*=⎝⎛​*xyz*​⎠⎞​

Розв'язок отриманого матричного рівняння має вигляд: 𝑋=𝐴−1⋅𝐵*X*=*A*−1⋅*B*. Знаходимо 𝐴−1*A*−1

△=∣23212−3341∣=−6≠0△=∣∣∣∣∣∣∣​213​324​2−31​∣∣∣∣∣∣∣​=−6=0

матриця невироджена, значить 𝐴−1*A*−1 існує.

𝐴11=14𝐴21=5𝐴31=−13𝐴12=−10𝐴22=−4𝐴32=8𝐴13=−2𝐴23=1𝐴33=1⇒𝐴−1=−16(145−13−10−48−211)*A*11​=14*A*12​=−10*A*13​=−2​*A*21​=5*A*22​=−4*A*23​=1​*A*31​=−13*A*32​=8*A*33​=1​⇒*A*−1=−61​⎝⎛​14−10−2​5−41​−1381​⎠⎞​

𝑋=−16(145−13−10−48−211)⋅(91416)=−16(126+70−208−90−56+128−18+14+16)=(23−2)*X*=−61​⎝⎛​14−10−2​5−41​−1381​⎠⎞​⋅⎝⎛​91416​⎠⎞​=−61​⎝⎛​126+70−208−90−56+128−18+14+16​⎠⎞​=⎝⎛​23−2​⎠⎞​

Відповідь: 𝑥=2,𝑦=3,𝑧=−2*x*=2,*y*=3,*z*=−2.

**Метод Гауса**[**#**](https://textbook.edu.goit.global/python/math-6vg4dc/v1/uk/docs/linear-algebra/linear-equation-systems#%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4-%D0%B3%D0%B0%D1%83%D1%81%D0%B0)

Розглянемо метод, найбільш універсальний для знаходження розв'язку будь-якої системи лінійних рівнянь, він працює у випадку, коли система має нескінченно багато розв'язків або несумісна, а саме метод **послідовного виключення невідомих** або **метод Гауса**.

Суть цього методу полягає в тому, щоб за допомогою елементарних перетворень послідовно виключати невідомі в рівняннях даної системи до тих пір, поки вона не прийде до ступінчастого (або, як ще кажуть, трикутного) вигляду. Найзручніше проводити ці перетворення над *розширеною матрицею* системи, елементами якої є коефіцієнти при невідомих і вільні члени:

(𝑎11𝑎12…𝑎1𝑛𝑏1𝑎21𝑎22…𝑎2𝑛𝑏2……………𝑎𝑚1𝑎𝑚2…𝑎𝑚𝑛𝑏𝑚)⎝⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎛​*a*11​*a*21​…*am*1​​*a*12​*a*22​…*am*2​​…………​*a*1*n*​*a*2*n*​…*amn*​​*b*1​*b*2​…*bm*​​​⎠⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎞​

Матриця ступінчастого вигляду має під (або над) головною діагоналлю одні нулі.

Елементарні перетворення:

* перестановка рядків матриці місцями;
* видалення всіх однакових (або пропорційних) рядків, крім одного;
* множення або ділення рядка на будь-яке число, відмінне від 00;
* видалення нульових рядків;
* додавання до рядка рядка, помноженого на число, відмінне від нуля.

Метод Гауса застосовується до будь-якої системи лінійних рівнянь. При цьому система буде несумісною, якщо в процесі перетворень ми отримаємо рівняння, в якому коефіцієнти при всіх невідомих дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля; якщо ж ми такого рівняння не зустрінемо, то система буде сумісна.

**Приклад 2**

Розв'язати систему методом Гауса: {𝑥1+2𝑥2+5𝑥3=−9𝑥1−𝑥2+3𝑥3=23𝑥1−6𝑥2−𝑥3=25⎩⎪⎪⎨⎪⎪⎧​*x*1​+2*x*2​+5*x*3​=−9*x*1​−*x*2​+3*x*3​=23*x*1​−6*x*2​−*x*3​=25​

**Розв'язок**

Записуємо розширену матрицю заданої системи: (125−91−1323−6−125)⎝⎛​113​2−1−6​53−1​−9225​​⎠⎞​ і виконуємо такі елементарні перетворення:

* множимо перший рядок матриці на (−1)(−1) і додаємо до другого рядка;
* множимо перший рядок на (−3)(−3) і додаємо до другого рядка.

Отримаємо:

(125−91−1323−6−125)→(125−90−3−2110−12−1652)⎝⎛​113​2−1−6​53−1​−9225​​⎠⎞​→⎝⎛​100​2−3−12​5−2−16​−91152​​⎠⎞​

В результаті ми виключили невідоме 𝑥1*x*1​ в першому та другому рівняннях системи.

Залишилося виключити змінну 𝑥2*x*2​ з останнього рівняння, і розширена матриця системи набуде трикутного вигляду.

Розділимо всі елементи третього рядка на (−4)(−4), отримаємо:

(125−90−3−2110−12−1652)→(125−90−3−211034−13)⎝⎛​100​2−3−12​5−2−16​−91152​​⎠⎞​→⎝⎛​100​2−33​5−24​−911−13​​⎠⎞​

Додаємо третій і четвертий рядки:

(125−90−3−211034−13)→(125−90−3−211002−2)⎝⎛​100​2−33​5−24​−911−13​​⎠⎞​→⎝⎛​100​2−30​5−22​−911−2​​⎠⎞​

Прийшли до системи рівнянь: {𝑥1+2𝑥2+5𝑥3=−9−3𝑥2−2𝑥3=112𝑥3=−2⇒𝑥1=2,𝑥2=−3,𝑥3=−1⎩⎪⎪⎨⎪⎪⎧​*x*1​+2*x*2​+5*x*3​=−9−3*x*2​−2*x*3​=112*x*3​=−2​⇒*x*1​=2,*x*2​=−3,*x*3​=−1.

Відповідь: (2;−3;−1)(2;−3;−1).

**Приклад 3**

Розв'язати систему методом Гауса:

{𝑥1−5𝑥2−8𝑥3+𝑥4=33𝑥1+𝑥2−3𝑥3−5𝑥4=1𝑥1−7𝑥3+2𝑥4=−511𝑥2+20𝑥3−9𝑥4=2⎩⎪⎪⎪⎪⎨⎪⎪⎪⎪⎧​*x*1​−5*x*2​−8*x*3​+*x*4​=33*x*1​+*x*2​−3*x*3​−5*x*4​=1*x*1​−7*x*3​+2*x*4​=−511*x*2​+20*x*3​−9*x*4​=2​

**Розв'язок**

Перетворюємо розширену матрицю системи

(1−5−81331−3−5110−72−501120−92)→(1−5−81301621−8−80511−801120−92)⎝⎜⎜⎜⎛​1310​−51011​−8−3−720​1−52−9​31−52​​⎠⎟⎟⎟⎞​→⎝⎜⎜⎜⎛​1000​−516511​−821120​1−81−9​3−8−82​​⎠⎟⎟⎟⎞​

Для отримання другої матриці виконали такі перетворення:

* помножили перший рядок на (−3)(−3) і додали до другого рядка;
* помножили перший рядок на (−1)(−1) і додали до третього рядка.

(1−5−81301621−8−80511−801120−92)→(1−5−8130−890−29−1600511−80−890−29162)⎝⎜⎜⎜⎛​1000​−516511​−821120​1−81−9​3−8−82​​⎠⎟⎟⎟⎞​→⎝⎜⎜⎜⎛​1000​−5−895−89​−8010​1−291−29​3−160−8162​​⎠⎟⎟⎟⎞​

Для отримання третьої матриці виконали такі перетворення:

* помножили третій рядок на (−21)(−21) і додали до другого рядка;
* помножили третій рядок на (−20)(−20) і додали до четвертого рядка.

(1−5−8130−890−29−1600511−80−890−29162)→(1−5−8130−890−29−1600511−800002)⎝⎜⎜⎜⎛​1000​−5−895−89​−8010​1−291−29​3−160−8162​​⎠⎟⎟⎟⎞​→⎝⎜⎜⎜⎛​1000​−5−8950​−8010​1−2910​3−160−82​​⎠⎟⎟⎟⎞​

Помножили другий рядок на (−1)(−1), додали до четвертого рядка та отримали кінцевий результат.

При аналізі отриманої системи бачимо, що в четвертому рівнянні коефіцієнти при всіх невідомих дорівнюють нулю, а вільний член дорівнює 22 (відмінний від нуля), значить, вихідна система не має розв'язків.

Відповідь: задана система несумісна.

**Метод Крамера**[**#**](https://textbook.edu.goit.global/python/math-6vg4dc/v1/uk/docs/linear-algebra/linear-equation-systems#%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4-%D0%BA%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%B0)

Метод Крамера застосовується для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), у яких число невідомих змінних дорівнює числу рівнянь і визначник основної матриці відмінний від нуля.

**Алгоритм розв'язання СЛАР методом Крамера.**[**#**](https://textbook.edu.goit.global/python/math-6vg4dc/v1/uk/docs/linear-algebra/linear-equation-systems#%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC-%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%B2%D1%8F%D0%B7%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F-%D1%81%D0%BB%D0%B0%D1%80-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%BC-%D0%BA%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%B0)

Нехай задана СЛАР, у якій число невідомих змінних дорівнює числу рівнянь:

{𝑎11𝑥1+𝑎12𝑥2+…+𝑎1𝑛𝑥𝑛=𝑏1𝑎21𝑥1+𝑎22𝑥2+…+𝑎2𝑛𝑥𝑛=𝑏2…𝑎𝑛1𝑥1+𝑎𝑛2𝑥2+…+𝑎𝑛𝑛𝑥𝑛=𝑏𝑛⎩⎪⎪⎪⎪⎨⎪⎪⎪⎪⎧​*a*11​*x*1​+*a*12​*x*2​+…+*a*1*n*​*xn*​=*b*1​*a*21​*x*1​+*a*22​*x*2​+…+*a*2*n*​*xn*​=*b*2​…*an*1​*x*1​+*an*2​*x*2​+…+*ann*​*xn*​=*bn*​​

1. Обчислюємо визначник основної матриці системи та перевіряємо його відмінність від нуля. Основна матриця системи складається з коефіцієнтів при невідомих.

△=∣𝑎11𝑎12…𝑎1𝑛𝑎21𝑎22…𝑎2𝑛…………𝑎𝑛1𝑎𝑛2…𝑎𝑛𝑛∣≠0△=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​*a*11​*a*21​…*an*1​​*a*12​*a*22​…*an*2​​…………​*a*1*n*​*a*2*n*​…*ann*​​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=0

1. Обчислюємо визначники:

△1=∣𝑏1𝑎12…𝑎1𝑛𝑏2𝑎22…𝑎2𝑛…………𝑏𝑛𝑎𝑛2…𝑎𝑛𝑛∣,△2=∣𝑎11𝑏1…𝑎1𝑛𝑎21𝑏2…𝑎2𝑛…………𝑎𝑛1𝑏𝑛…𝑎𝑛𝑛∣,…,△𝑛=∣𝑎11𝑎12…𝑏1𝑎21𝑎22…𝑏2…………𝑎𝑛1𝑎𝑛2…𝑏𝑛∣,△1​=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​*b*1​*b*2​…*bn*​​*a*12​*a*22​…*an*2​​…………​*a*1*n*​*a*2*n*​…*ann*​​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​,△2​=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​*a*11​*a*21​…*an*1​​*b*1​*b*2​…*bn*​​…………​*a*1*n*​*a*2*n*​…*ann*​​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​,…,△*n*​=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​*a*11​*a*21​…*an*1​​*a*12​*a*22​…*an*2​​…………​*b*1​*b*2​…*bn*​​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​,

які отримуємо з визначника основної матриці шляхом заміни 𝑘*k*-го стовпця на стовпець вільних членів (𝑘=1,2,…,𝑛)(*k*=1,2,…,*n*)

1. Знаходимо значення невідомих змінних 𝑥1,𝑥2,…,𝑥𝑛*x*1​,*x*2​,…,*xn*​ за формулами Крамера:

𝑥1=△1△,𝑥2=△2△,…,𝑥𝑛=△𝑛△*x*1​=△△1​​,*x*2​=△△2​​,…,*xn*​=△△*n*​​

*Примітка*: якщо △=0△=0 і хоча б один із визначників △1,△2,…,△𝑛△1​,△2​,…,△*n*​ відмінний від нуля, то система лінійних рівнянь розв'язків не має. Якщо ж △=0△=0 і всі △𝑖=0,(𝑖=1,2,…,𝑛)△*i*​=0,(*i*=1,2,…,*n*), то система лінійних рівнянь має безліч розв'язків.

**Приклад 4**

Розв'язати систему методом Крамера.

{2𝑥1+2𝑥2−𝑥3+𝑥4=44𝑥1+3𝑥2−𝑥3+2𝑥4=68𝑥1+5𝑥2−3𝑥3+4𝑥4=123𝑥1+3𝑥2−2𝑥3+2𝑥4=6⎩⎪⎪⎪⎪⎨⎪⎪⎪⎪⎧​2*x*1​+2*x*2​−*x*3​+*x*4​=44*x*1​+3*x*2​−*x*3​+2*x*4​=68*x*1​+5*x*2​−3*x*3​+4*x*4​=123*x*1​+3*x*2​−2*x*3​+2*x*4​=6​

**Розв'язок**

1. Обчислюємо визначник основної матриці системи:

△=∣22−1143−1285−3433−22∣=△=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​2483​2353​−1−1−3−2​1242​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Скористаємося методом зниження порядку. Будемо перетворювати визначник так, щоб в одному з рядків (або в одному зі стовпців) тільки один елемент залишився, відмінний від нуля. Помножимо другий рядок на (−2)(−2) і додамо до третього рядка:

=∣22−1143−120−1−1033−22∣==∣∣∣∣∣∣∣∣∣​2403​23−13​−1−1−1−2​1202​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Тепер помножимо третій стовпець на (−1)(−1) і додамо до другого:

=∣23−1144−1200−1035−22∣==∣∣∣∣∣∣∣∣∣​2403​3405​−1−1−1−2​1202​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

В отриманому визначнику у третьому рядку всі елементи, крім одного, дорівнюють нулю. Виконаємо розклад визначника за третім рядком:

=−(−1)(3+3)⋅∣231442352∣=2=−(−1)(3+3)⋅∣∣∣∣∣∣∣​243​345​122​∣∣∣∣∣∣∣​=2

Визначник не дорівнює 00, значить, можна застосовувати формули Крамера

1. Обчислюємо визначники △1,△2,△3,△4△1​,△2​,△3​,△4​

△1=∣42−1163−12125−3463−22∣=△1​=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​46126​2353​−1−1−3−2​1242​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Множимо другий рядок на (−2)(−2) і додаємо до третього рядка, потім помножимо його на (−1)(−1) і додамо до четвертого рядка:

=∣42−1163−120−1−1000−10∣==∣∣∣∣∣∣∣∣∣​4600​23−10​−1−1−1−1​1200​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Виконуємо розклад визначника за четвертим рядком:

=−(−1)7⋅∣4216320−10∣=2=−(−1)7⋅∣∣∣∣∣∣∣​460​23−1​120​∣∣∣∣∣∣∣​=2

△2=∣24−1146−12812−3436−22∣=△2​=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​2483​46126​−1−1−3−2​1242​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Множимо другий рядок на (-2) і додаємо до третього рядка:

=∣24−1146−1200−1036−22∣==∣∣∣∣∣∣∣∣∣​2403​4606​−1−1−1−2​1202​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Виконуємо розклад визначника за третім рядком:

=−(−1)6⋅∣241462362∣=2=−(−1)6⋅∣∣∣∣∣∣∣​243​466​122​∣∣∣∣∣∣∣​=2

△3=∣22414362851243362∣=△3​=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​2483​2353​46126​1242​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Множимо другий рядок на (-2) і додаємо до третього рядка:

=∣224143620−100−1000∣==∣∣∣∣∣∣∣∣∣​240−1​23−10​4600​1200​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Виконуємо розклад визначника за третім рядком:

=−(−1)5⋅∣241462−100∣=−2=−(−1)5⋅∣∣∣∣∣∣∣​24−1​460​120​∣∣∣∣∣∣∣​=−2

△4=∣22−1443−1685−31233−26∣=△4​=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​2483​2353​−1−1−3−2​46126​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Множимо другий рядок на (-2) і додаємо до третього рядка:

=∣22−1443−160−1−1033−26∣==∣∣∣∣∣∣∣∣∣​2403​23−13​−1−1−1−2​4606​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=

Множимо третій стовпець на (-1) і додаємо до другого:

=∣23−1444−1600−1035−26∣=−(−1)6⋅∣234446356∣=−2=∣∣∣∣∣∣∣∣∣​2403​3405​−1−1−1−2​4606​∣∣∣∣∣∣∣∣∣​=−(−1)6⋅∣∣∣∣∣∣∣​243​345​466​∣∣∣∣∣∣∣​=−2

1. Знаходимо значення невідомих змінних:

𝑥1=△1△=22=1;𝑥2=△2△=22=1;𝑥3=△3△=−22=−1;𝑥4=△4△=−22=−1;*x*1​=△△1​​=22​=1;*x*2​=△△2​​=22​=1;*x*3​=△△3​​=2−2​=−1;*x*4​=△△4​​=2−2​=−1;

Відповідь: (1;1;−1;−1)(1;1;−1;−1).